

[This question paper contains _____ printed pages.]

Sr. No. of Question Paper: Your Roll No.

Unique Paper Code: 12271101

Name of the Paper: Introductory Microeconomics

Name of the Course: B.A. (H) Economics

Semester: I

Duration: 3 Hours Maximum Marks: 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are *six* questions in the question paper. Answer any *four* questions.
3. All questions carry equal (18.75) mark
4. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper
1. इस प्रश्न पत्र के मिलते ही अपना अनुक्रमांक ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर लिखिए।
2. इस प्रश्न पत्र में छह प्रश्न हैं। किसी भी चार प्रश्नों का उत्तर दें।
3. सभी प्रश्नों के उत्तर (18.75) सामान हैं।
4. प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिंदी में दिए जा सकते हैं। परन्तु पुरे प्रश्न पत्र में एक ही माध्यम का उपयोग किया जाना चाहिए।

1. Provide brief comments on the following statements. Attempt any five. (3.75 x 5)

- Prices carry all the relevant information about consumption demand and production in a competitive market economy.
- Along a linear demand curve, the price elasticity of demand is constant.
- Consumers are necessarily better off when a closed economy opens its market for international trade.
- The substitution effect for the change in price of a Giffen good is positive.
- A non-discriminating monopolist always sets the price above the marginal cost of production.
- The indifference curve is downward sloping if both the commodities are 'bad'.

1. निम्नलिखित कथनों में से किन्हीं 5 संक्षिप्त पर टिप्पणी कीजिये। (3.75 x 5)

- कीमतें प्रतिस्पर्धी बाजार अर्थव्यवस्था में खपत की मांग और उत्पादन के बारे में सभी प्रासंगिक जानकारी रखती हैं।
- एक ऐंथिक मांग वक्र के साथ, मांग की कीमत लोच स्थिर है।
- जब एक बंद अर्थव्यवस्था अंतर्राष्ट्रीय व्यापार के लिए अपना बाजार खोलती है तो उपभोक्ता आवश्यक रूप से बेहतर होते हैं।
- Giffen good की कीमत में बदलाव के लिए प्रतिस्थापन प्रभाव सकारात्मक है।
- एक भेदभाव रहित एकाधिकार हमेशा उत्पादन की सीमांत लागत से ऊपर की कीमत निर्धारित करता है।
- यदि दोनों वस्तुएं 'खराब' हैं तो उदासीनता वक्र नीचे की ओर झुका होगा।

2.

- Apple and Samsung both make mobile phones and tablets using labour as an input. The amount of labour hours needed to produce one unit of each type of device is as follows:

	Hours per unit	
	Mobile Phone	Tablet
Apple	2	5
Samsung	5	7

Let l_m^A and l_t^A denote the labour employment by Apple in the production of mobile and tablet, respectively. Similarly, l_m^S and l_t^S denote the labour employment by Samsung in the production of mobile and tablet, respectively. It is further given that $l_m^A + l_t^A = 70$ and $l_m^S + l_t^S = 70$.

- Calculate opportunity cost of each type of device for each company and show that Apple has comparative advantage in producing mobile phones. (2)
- If each company divides equally the labour available in the production of the two devices, what's the total production of each device in the economy? (2)
- Suggest an allocation of labour for both the companies such that the total production of each device is higher than that in part (ii). (4)

b. Draw the indifference curve for a person deciding how to allocate time between work and leisure. If there is an increase in wage, is it possible that the person's consumption would fall? (5.75)

c. A plague that reduces the labour supply can affect the earning of the land owners. Do you agree? Give reasons in support of your answers. (5)

2. a. एप्पल और सैमसंग दोनों एक इनपुट के रूप में श्रम का उपयोग करके मोबाइल फोन और टैबलेट बनाते हैं। प्रत्येक प्रकार के उत्पादन की एक इकाई का उत्पादन करने के लिए आवश्यक श्रम घंटों की मात्रा इस प्रकार है:

	Hours per unit	
	Mobile Phone	Tablet
Apple	2	5
Samsung	5	7

l_m^A और l_t^A क्रमशः मोबाइल और टैबलेट के उत्पादन में Apple द्वारा श्रम रोजगार को निरूपित करता है। इसी तरह, l_m^S और l_t^S क्रमशः मोबाइल और टैबलेट के उत्पादन में सैमसंग द्वारा श्रम रोजगार को निरूपित करते हैं। अन्य उपलब्ध जानकारी $l_m^A + l_t^A = 70$ और $l_m^S + l_t^S = 70$ है।

- i. प्रत्येक कंपनी के लिए प्रत्येक प्रकार के डिवाइस की अवसर लागत की गणना करें और दिखाएं कि एप्पल के मोबाइल फोन के उत्पादन में तुलनात्मक लाभ है। (2)
- ii. यदि प्रत्येक कंपनी दो उत्पकरणों के उत्पादन में समान रूप से उपलब्ध श्रम को विभाजित करती है, तो अर्थव्यवस्था में प्रत्येक डिवाइस का कुल उत्पादन क्या है? (2)
- iii. दोनों कंपनियों के लिए श्रम के आवंटन का सुझाव दें जैसे कि प्रत्येक डिवाइस का कुल उत्पादन भाग (ii) की तुलना में अधिक है। (4)

b. काम और अवकाश के बीच समय आवंटित करने का निर्णय लेने वाले व्यक्ति के लिए उदासीनता वक्र बनाइये। यदि वेतन में वृद्धि होती है, तो क्या यह संभव है कि व्यक्ति की खपत गिर जाएगी? (5.75)

c. एक प्लेग जो श्रम आपूर्ति को कम करता है, भूमि मालिकों की कमाई को प्रभावित कर सकता है। क्या आप सहमत हैं? अपने उत्तर के समर्थन में कारण दें। (5)

3. a. The market for vanilla ice cream is given by the following information:

$$Q^d = 800 - 30P^v + 10P^c$$

$$Q^s = 250 + 30P^v - 10P^m$$

Where Q^d is the quantity demanded, Q^s is quantity supplied, P^v is the price of vanilla ice cream, P^c is the price of chocolate ice cream and P^m is the price of milk.

i. Let $P^c = 10$ and $P^m = 5$. Calculate the equilibrium price and quantity in the vanilla ice cream market. Compare the own-price elasticity of demand and supply at equilibrium. (4)

ii. Calculate the cross-price elasticity of demand for vanilla ice cream. What does the sign of the elasticity tell you about the relationship between vanilla and chocolate ice cream? (3)

iii. Suppose the price of milk rises to 6 per unit due to taxation in the milk market. Show the impact of this on equilibrium price and consumer welfare in the vanilla market. (8)

b. Explain the problem with imposing competitive pricing in the case of a natural monopoly. (3.75)

3. a. वैनिला आइसक्रीम के बाजार जानकारी निम्नलिखित है:

$$Q^d = 800 - 30P^v + 10P^c$$

$$Q^s = 250 + 30P^v - 10P^m$$

जहां Q^d की मांग की गई मात्रा है, Q^s की आपूर्ति की गई मात्रा है, P^v वैनिला आइसक्रीम की कीमत है, P^c चॉकलेट आइसक्रीम की कीमत है और P^m दूध की कीमत है।

- i. माना $P^c = 10$ और $P^m = 5$ है। वैनिला आइसक्रीम बाजार में संतुलन मूल्य और मात्रा की गणना करें। संतुलन पर मांग और आपूर्ति की स्वयं की कीमत लोच की तुलना करें। (4)
- ii. वैनिला आइसक्रीम की मांग के क्रॉस-मूल्य लोच की गणना करें। लोच का संकेत आपको वैनिला और चॉकलेट आइसक्रीम के बीच के संबंध के बारे में क्या बताता है? (3)
- iii. मान लीजिए कि दूध की कीमत दूध बाजार में कराधान के कारण 6 प्रति यूनिट हो जाती है। वैनिला बाजार में संतुलन मूल्य और उपभोक्ता कल्याण पर इसका प्रभाव दिखाओ। (8)

b. प्राकृतिक एकाधिकार के मामले में प्रतिस्पर्धी मूल्य निर्धारण के साथ समस्या को समझाएं। (3.75)

4. a. Suppose in a closed economy, the Ministry of Commerce decided to promote handicrafts sector within the country. It took two measures of promotion. One, it ran a country wide campaign and organised *Handicrafts Mega-Mela* in various cities in the country. Second, the Ministry provided the latest tech-equipment to the producers of handicrafts at subsidised rate.

- i. Show, with the help of a diagram, how the above two measures increase the equilibrium quantity of handicraft products. What happens to the equilibrium price? Label before-promotion equilibrium point as E_0 and post-promotion equilibrium point as E_1 . (6)
- ii. Consider E_1 and suppose, the government opens the handicraft market for international trade. Assume the world price P^w is higher than the domestic equilibrium price. Discuss the gains and losses in the welfare of economic participants from this policy. (6)

b. Consider a market for cloth masks. The demand curve is given by $Q^d = 1000/P$ and the supply curve is given by $Q^s = 10P$. Show that if a unit tax 't' per unit is imposed in the market, the sellers and buyers will share the burden of the tax equally. (6.75)

4.

a. मान लीजिए कि एक बंद अर्थव्यवस्था में, वाणिज्य मंत्रालय ने देश के भीतर हस्तशिल्प क्षेत्र को बढ़ावा देने का फैसला किया। इसने प्रयार के दो उपाय किए। एक, इसने देशव्यापी अभियान चलाया और देश के विभिन्न शहरों में हस्तशिल्प मेंगा-मेले आयोजित किए। दूसरा, मंत्रालय ने अनुदानित दर पर हस्तशिल्पियों के उत्पादकों को नवीनतम तकनीकि-उपकरण प्रदान किए।

i. एक चित्र की मदद से दिखाएँ, कैसे उपरोक्त दो उपायों से हस्तशिल्प उत्पादों की संतुलन मात्रा में वृद्धि होती है। संतुलन कीमत का क्या होगा? पदोन्नति से पहले लेबल E_0 के रूप में संतुलन बिंदु और E_1 के रूप में पोस्ट-पदोन्नति संतुलन बिंदु हैं। (6)

ii. E_1 पर विचार करें और मान लें, सरकार अंतर्राष्ट्रीय व्यापार के लिए हस्तकला बाजार खोलती है। माना वैश्विक मूल्य P^* घरेलू संतुलन मूल्य से अधिक है। इस नीति से आर्थिक प्रतिभागियों के कल्याण में लाभ और हानि पर चर्चा कीजिये। (6)

b. कपड़े के मास्क के लिए एक बाजार पर विचार करें। मांग वक्र $Q^d = 1000/P$ और आपूर्ति वक्र $Q^s = 10P$ दिया गया है। यह दिखाएँ कि यदि बाजार में प्रति यूनिट 't' कर लगाया जाता है, तो विक्रेता और खरीदार कर के बोझ को समान रूप से साझा करेंगे। (6.75)

5.

a. The market *Happy Holidays* is a tour and travel company operating in a competitive market. Due the recent health pandemic, there are travel bans in many parts of the world and it has adversely impacted the demand for its services. Suppose its marginal cost given by $c = 2q$ where q is the units of sales. The fixed cost is 200. The current demand is given by $p = 60 - 5q$ where p is the price per unit.

- i. Show that the firm incurs losses with these costs and demand for its services. (4)
- ii. Should the firm shut down? Explain why or why not. (6)

b. What are the substitution effect and income effect associated with an increase in interest rate on saving deposits? Show and explain on a diagram a case where the savings of a household remain same after an increase in the interest rate of saving deposits. (8.75)

5.

a. बाजार हैप्पी होलिडेज एक टूर एंड ट्रैवल कंपनी है जो प्रतिस्पर्धी बाजार में काम कर रही है। हालिया स्वास्थ्य महामारी के कारण, दुनिया के कई हिस्सों में यात्रा प्रतिबंधित हैं जिस वजह से कंपनी की सेवाओं की मांग पर प्रतिकूल प्रभाव पड़ा है। मान लीजिए कि दी गई सीमांत लागत $c = 2q$ है तथा बिक्री की इकाइयाँ हैं।

स्थायी लागत 200 है। वर्तमान मांग $p = 60 - 5q$ दी गई है जहाँ p प्रति इकाइ मूल्य है।

- i. यह दिखाएँ कि फर्म इन लागतों और अपनी सेवाओं की मांग के साथ हानि उठाती है। (4)
- ii. क्या फर्म बंद हो जानी चाहिए? क्यों या क्यों नहीं व्याख्या कीजिये। (6)

b. बचत राशि पर व्याज दर में वृद्धि से जुड़े प्रतिस्थापन प्रभाव और आय प्रभाव क्या होंगे? जहाँ बचत की व्याज दर में वृद्धि के बाद एक घर की बचत समान रहती है उसे आरेख पर दर्शाते हुए समझाएँ। (8)

6.

a. Suppose the labour welfare (W) in an industry is defined as $W = wl$, where w = wage rate and l = no. of labour hours employed. Assuming a downward sloping demand curve for labour, show the impact of a minimum wage policy that leaves the labour welfare unchanged. (6)

b. Why do governments regulate monopolies? Does a perfectly discriminating monopoly need to be regulated if the government defines welfare as total surplus in a market? (6.75)

c. “The pharmaceutical firms set high prices on some life-saving drugs. The government should intervene and regulate the market price”. Discuss the positive and normative notions involved in the above statement. Suggest a method of government intervention in light of the statement. (6)

6.

a. मान लीजिए कि किसी उद्योग में श्रमिक कल्याण (W) को $W = wl$, से दर्शाया गया है जहाँ w = मजदूरी दर और l = काम का समय (in hours) है। यह मानते हुए कि श्रम के लिए मांग वक्र का ढालान (slope) नीचे की ओर है, न्यूनतम मजदूरी नीति का प्रभाव दिखाये जो श्रम कल्याण को अपरिवर्तित छोड़ देता है। (6)

b. सरकार एकाधिकार को क्यों नियंत्रित करती है? यदि सरकार बाजार में कुल अधिशेष के रूप में कल्याण को परिभाषित करती है तो क्या पूरी तरह से भेदभाव करने वाले एकाधिकार को विनियमित करने की आवश्यकता है? (6.75)

c. “दवा कंपनियों ने कुछ जीवनरक्षक दवाओं पर उच्च मूल्य निर्धारित किया है। सरकार को इसमें हस्तक्षेप करके बाजार मूल्य को विनियमित करना चाहिए।” उपरोक्त कथन में शामिल सकारात्मक और प्रामाणिक धारणाओं की चर्चा कीजिये। बयान के सन्दर्भ में सरकार के हस्तक्षेप का एक तरीका बताइये। (6)

[This question paper contains _____ printed pages.]

Sr. No. of Question Paper: Your Roll No.

Unique Paper Code: **12271101**

Name of the Paper: **Introductory Microeconomics (For VH only)**

Name of the Course: **B.A. (H) Economics**

Semester: **I**

Duration: 3 Hours Maximum Marks: 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are **six** questions in the question paper. Answer any **four** questions.
3. All questions carry equal (18.75) mark
4. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper
1. इस प्रश्न पत्र के मिलते ही अपना अनुक्रमांक ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर लिखिए।
2. इस प्रश्न पत्र में छह प्रश्न हैं। किसी भी चार प्रश्नों का उत्तर दें।
3. सभी प्रश्नों के उत्तर (18.75) सामान हैं।
4. प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिंदी में दिए जा सकते हैं। परन्तु पुरे प्रश्न पत्र में एक ही माध्यम का उपयोग किया जाना चाहिए।

1. Provide brief comments on the following statements. Attempt any five. (3.75 x 5)

- a. Society faces a short-run trade-off between inflation and unemployment.
- b. Accounting profits are higher than economic profits.
- c. Market do not allocate resources efficiently in the presence of market failure.
- d. For a competitive firm, its revenue is proportional to the amount of output it produces.
- e. A monopolist firm faces a downward sloping demand curve.
- f. The demand for factors is a derived demand.

1. निम्नलिखित कथनों में से किन्ही 5 संक्षिप्त पर टिप्पणी कीजिये। (3.75 x 5)

- a. अल्पकाल में समाज, महंगाई और बेरोजगारी के बीच trade-off का सामना करता है
- b. लेखांकन लाभ आर्थिक लाभ से अधिक है।

- c. बाजार की विफलता की उपस्थिति में बाजार कुशलतापूर्वक संसाधनों का आवंटन नहीं करता है।
- d. एक प्रतिस्पर्धी फर्म के लिए, इसका राजस्व उत्पादन की मात्रा के अनुपात में होता है।
- e. एक एकाधिकार फर्म एक नीचे झुका हुआ मांग वक्र का सामना करता है।
- f. कारकों की मांग एक व्युत्पन्न मांग है।

2.

- a. Apple and Samsung both make mobile phones and tablets using labour as an input. The amount of labour hours needed to produce one unit of each type of device is as follows:

	Hours per unit	
	Mobile Phone	Tablet
Apple	2	5
Samsung	5	7

Suppose each company have 70 units of labour to allocate between the two production.

- i. Calculate opportunity cost of each type of device for each company and show that Apple has comparative advantage in producing mobile phones. (4)
- ii. If each company divides equally the labour available in the production of the two devices, what's the total production of each device in the economy? (4)
- iii. Suggest an allocation of labour for both the companies such that the total production of each device is higher than that in part (ii). (5)

- b. A plague that reduces the labour supply can affect the earning of the land owners. Do you agree? Give reasons in support of your answers. (5.75)

2.

- a. ऐप्पल और सैमसंग दोनों एक इनपुट के रूप में श्रम का उपयोग करके मोबाइल फोन और टैबलेट बनाते हैं। प्रत्येक प्रकार के उपकरण की एक इकाई का उत्पादन करने के लिए आवश्यक श्रम घंटों की मात्रा इस प्रकार है:

	Hours per unit	
	Mobile Phone	Tablet
Apple	2	5
Samsung	5	7

मान लीजिए कि प्रत्येक कंपनी के पास दो उत्पादन के बीच आवंटित करने के लिए 70 इकाइयों का श्रम है।

i. प्रत्येक कंपनी के लिए प्रत्येक प्रकार के डिवाइस की अवसर लागत की गणना करें और दिखाएं कि एप्पल के मोबाइल फोन के उत्पादन में तुलनात्मक लाभ है। (4)

ii. यदि प्रत्येक कंपनी दो उपकरणों के उत्पादन में समान रूप से उपलब्ध श्रम को विभाजित करती है, तो अर्थव्यवस्था में प्रत्येक डिवाइस का कुल उत्पादन क्या है? (4)

iii. दोनों कंपनियों के लिए श्रम के आवंटन का सुझाव दें जैसे कि प्रत्येक डिवाइस का कुल उत्पादन भाग (ii) की तुलना में अधिक है। (5)

c. एक प्लेग जो श्रम आपूर्ति को कम करता है, भूमि मालिकों की कमाई को प्रभावित कर सकता है। क्या आप सहमत हैं? अपने उत्तर के समर्थन में कारण दें। (5.75)

3.

a. The market for vanilla ice cream is given by the following information:

$$Q^d = 800 - 30P^v + 10P^c$$

$$Q^s = 250 + 30P^v - 10P^m$$

Where Q^d is the quantity demanded, Q^s is quantity supplied, P^v is the price of vanilla ice cream, P^c is the price of chocolate ice cream and P^m is the price of milk.

i. Let $P^c = 10$ and $P^m = 5$. Calculate the equilibrium price and quantity in the vanilla ice cream market. Compare the own-price elasticity of demand and supply at equilibrium. (4)

ii. Calculate the cross-price elasticity of demand for vanilla ice cream. What does the sign of the elasticity tell you about the relationship between vanilla and chocolate ice cream? (3)

iii. Suppose the price of milk rises to 6 per unit due to taxation in the milk market. What will be the impact of this on equilibrium price and consumer welfare in the vanilla market? (8)

b. Explain the problem with imposing competitive pricing in the case of a natural monopoly. (3.75)

3.

a. वैनिला आइसक्रीम के बाजार जानकारी निम्नलिखित हैं:

$$Q^d = 800 - 30P^v + 10P^c$$

$$Q^s = 250 + 30P^v - 10P^m$$

जहां Q^d की मांग की गई मात्रा है, Q^s की आपूर्ति की गई मात्रा है, P^v वैनिला आइसक्रीम की कीमत है, P^c चॉकलेट आइसक्रीम की कीमत है और P^m दूध की कीमत है।

i. माना $P^c = 10$ और $P^m = 5$ है। वैनिला आइसक्रीम बाजार में संतुलन मूल्य और मात्रा की गणना करें। संतुलन पर मांग और आपूर्ति की स्वयं की कीमत लोच की तुलना करें। (4)

ii. वैनिला आइसक्रीम की मांग के क्रॉस-मूल्य लोच की गणना करें। लोच का संकेत आपको वैनिला और चॉकलेट आइसक्रीम के बीच के संबंध के बारे में क्या बताता है? (3)

iii. मान लीजिए कि दूध की कीमत दूध बाजार में कराधान के कारण 6 प्रति यूनिट हो जाती है। वैनिला बाजार में संतुलन मूल्य और उपभोक्ता कल्याण पर इसका प्रभाव क्या होगा? (8)

b. प्राकृतिक एकाधिकार के मामले में प्रतिस्पर्धी मूल्य निर्धारण के साथ समस्या को समझाएं। (3.75)

4. A monopoly faces market demand $Q = 30 - 2p$ and a cost function $C = 1/4Q^2$.

- Find the profit maximizing price and quantity and the resulting profit to the monopoly. (4)
- What is the socially optimal price? Determine the deadweight loss (DWL) due to monopolist behaviour. Calculate consumer surplus (CS) and producer surplus (PS). (5)
- Assume that the government puts a price ceiling on the monopolist at $P = 8$. How much output will the monopolist produce? Is the deadweight loss higher or lower now? Discuss. (5)
- What price ceiling should the government implement on the monopolist if its objective is to maximize the total surplus? How much output will the monopolist produce at this price ceiling? Calculate the profit of the monopolist and the Deadweight Loss? (4.75)

4. एक एकाधिकार बाजार की मांग $Q = 30 - 2p$ और एक लागत $C = 1/4Q^2$ का सामना करता है।

- लाभ को अधिकतम करने के मूल्य और मात्रा और एकाधिकार के परिणामस्वरूप लाभ को जात कीजिये। (4)
- सामाजिक रूप से इष्टतम मूल्य क्या है? एकाधिकारवादी व्यवहार के कारण डेडवेट लॉस (DWL) को निर्धारित कीजिये एवं उपभोक्ता अधिशेष (CS) और निर्माता अधिशेष (PS) की गणना कीजिये। (5)
- मान लें कि सरकार एकाधिकार पर $P=8$ मूल्य सीमा लगाती है। तब एकाधिकारी कितना उत्पादन करेगा? क्या ऐसे में डेडवेट लॉस कम या ज्यादा है? चर्चा कीजिये। (5)
- यदि उद्देश्य कुल अधिशेष को अधिकतम करना है, तो सरकार को एकाधिकार पर किस मूल्य सीमा को लागू करना चाहिए? इस मूल्य सीमा पर एकाधिकारी कितना उत्पादन करेगा? एकाधिकारवादी और डेडवेट लॉस के लाभ की गणना करें? (4.75)

5. Suppose that the market demand for a product is given by $Q_D = A - Bp$. The typical firm's cost function is given by $C = F + cq + dq^2$, where p is the price, Q_D is the aggregate industry level demand for the product, and q is the output produced by each firm.

- Compute the long-run equilibrium output and price for the typical firm in this market. (6)
- Calculate the equilibrium number of firms in this market as a function of all of the parameters in this problem. (6)
- Describe how the increase in the firm's fixed cost function affects the long run equilibrium number of firms in this example. Explain your results intuitively. (6.75)

5. मान लीजिए कि किसी उत्पाद के लिए बाजार की मांग $Q_D = A - Bp$ दी गई है। प्ररूपी फर्म का लागत फलन $C = F + cq + dq^2$, है, जहां p कीमत है, Q_D उत्पाद की कुल औद्योगिक मांग है, और q प्रत्येक फर्म का उत्पादन है।

- a. इस बाजार में विशिष्ट फर्म के लिए लंबे समय तक संतुलन उत्पादन और कीमत की गणना कीजिये। (6)
- b. इस समस्या में सभी मापदंडों के एक फलन के रूप में इस बाजार में कंपनियों की संतुलन संख्या की गणना कीजिये। (6)
- c. बताएं कि फर्म के निश्चित लागत फलन में वृद्धि इस उदाहरण में लंबे समय तक चलने वाली फर्मों की संख्या को कैसे प्रभावित करती है। अपने परिणामों को सहज रूप से समझाएं। (6.75)

6.

a. Nicky enjoys travelling within India and in Europe. Her utility function is: $U(IE) = IE$, where I denotes the days spent travelling on vacation in India and E denotes days spent travelling in Europe. The price of a day spent travelling is 80 USD in India and 200 USD in Europe. Her annual budget for travelling is 6,000 USD. At the optimal consumption bundle, Nicky spends half of her budget on travelling in India and half on travelling abroad.

- i. Find Nicky's utility maximizing choice of days travelling in India and in Europe. Also calculate her utility level from consuming that bundle. (4)
- ii. Suppose that the price of travelling in India increases to 100 USD per day. What is the total change in quantity of E and I ? (4)
- b. “The pharmaceutical firms set high prices on some life-saving drugs. The government should intervene and regulate the market price”. Discuss the positive and normative notions involved in the above statement. Suggest a method of government intervention in light of the statement. (5.75)

c. The aggregate demand for flats in Kalkaji is $Q_D = 100 - 5p$ and supply is $Q_S = 50 + 5p$. Quantity (Q) is measured in hundreds of apartments. Price (p), the average monthly rental rate, is measured in thousands of rupees. What is the change in city population if the government sets a maximum average monthly rental of 10000, as all those who cannot find an apartment leave the city? (5)

6.

a. निकी को भारत के और यूरोप में यात्रा करना पसंद है। उसका उपयोगिता फलन: $U(IE) = IE$ है, जहां I छुटियों में भारत में यात्रा करने में बिताए दिनों को दर्शाता है और E यूरोप में यात्रा करने

में बिताए दिनों को दर्शाता है। यात्रा में बिताए गए एक दिन की कीमत भारत में 80 USD और यूरोप में 200 USD है। यात्रा के लिए उसका वार्षिक बजट 6,000 USD है। इष्टटम खपत बंडल में, निकी अपना आधा भारत में यात्रा करने पर खर्च करती है और आधा विदेश यात्रा पर।

- i. भारत और यूरोप में यात्रा के दिनों में निकी के अधिकतम उपयोगिता विकल्प की गणना कीजिये। उस बंडल के सेवन से उसकी उपयोगिता के स्तर की भी गणना करें। (4)
- ii. मान लीजिए कि भारत में यात्रा की कीमत प्रति दिन 100 USD तक बढ़ जाती है। तब E और I की मात्रा में कुल परिवर्तन क्या होगा? (4)
- b. “दवा कंपनियों ने कुछ जीवनरक्षक दवाओं पर उच्च मूल्य निर्धारित किया है। सरकार को इसमें हस्तक्षेप करके बाजार मूल्य को विनियमित करना चाहिए।” उपरोक्त कथन में शामिल सकारात्मक और प्रामाणिक धारणाओं की चर्चा कीजिये। बयान के सन्दर्भ में सरकार के हस्तक्षेप का एक तरीका बताइये। (5.75)
- c. कालकाजी में फ्लैटों की कुल मांग $Q_D = 100 - 5p$ है और आपूर्ति $Q_S = 50 + 5p$ है। मात्रा (Q) को सैकड़ों अपार्टमेंट में मापा जाता है। मूल्य (p), औसत मासिक किराये की दर को हजारों रुपये में मापा जाता है। शहर की आबादी में क्या बदलाव आएगा अगर सरकार 10000 का अधिकतम औसत मासिक किराया निर्धारित करती है, क्यूं की उन सभी को जो एक अपार्टमेंट नहीं पा सकते हैं, शहर छोड़ना होगा? (5)

Instructions for the candidates:

1. Answers may be written either in English or in Hindi; but same medium should be used throughout the paper.
2. **There are six questions in all. Attempt any four.**
3. All parts of a question must be answered together.
4. All questions carry equal (18.75) marks.
5. Use of simple calculator is allowed.

1. (a) Consider the proposition $1 < x^2 < 4$.(i) For what values of x does the proposition hold true?(ii) Is the condition $1 < x < 2$ necessary or sufficient or both necessary and sufficient for the proposition to be satisfied?(iii) Is the condition $|x| > 1$ necessary or sufficient or both necessary and sufficient for the proposition to be satisfied?(c) Given $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n+1} = 0$, with a_0, a_1, \dots, a_n as constants, prove that $a_0x + a_1x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ has atleast one real root between 0 and 1.(c) (i) Find the intervals where f is increasing/decreasing if $f'(x) = \frac{2x+6}{x^{1/3}}$.(ii) Find the intervals where $f'(x)$ is increasing/decreasing?(iii) Find the local extreme values of f (if any).

(d) Consider the following system of equations

$$\alpha x + y = \beta$$

$$x + \alpha y = \beta$$

- For what values of α and β , does the system of equations, not have a solution.
- For what values of α and β , does the system of equations, have a unique solution. Also, find the solution in this case.
- For what values of α and β , does the system of equations, have infinite solutions.

(3, 5, 6, 4.75)

2. (a) (i) Solve for the set of all real numbers x that satisfy $\frac{x^2-x}{x^2+3x+2} > 0$.(ii) Find the domain and range of $f(x) = \sqrt{\log_3(3x-4)}$.(b) Given $f(x) = 3(x-1)^5 + 2x^3 + x + 2$. How many roots does this function have?(c) Consider a function f that is differentiable for all x . Assume that $f(2) = -3$, $f'(2) = 5$, $f''(2) = 3$ and $f'''(2) = -8$.(i) Write the third order Taylor's polynomial for f about $x = 2$ and use it to approximate $f(1.5)$.(ii) If $|f^4(x)| \leq 3$ for all x , prove that $f(1.5) \neq -5$.(d) Solve the inequality $3^x < \frac{1}{3}$. Consider points $0 < x_1 < x_2$ in the domain of $f(x) = 3^x$ and prove that $\frac{3^{x_1}+3^{x_2}}{2} > 3^{\frac{x_1+x_2}{2}}$.

(e) Examine whether the following system of equations have solutions. If they do, determine the number of degrees of freedom.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2$$

$$4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 7$$

(3, 3, 4, 4.75, 4)

3. (a) A travel agent surveyed 100 people to find out how many of them had visited the cities of Jaipur and Alwar. Thirty-one people had visited Jaipur, 26 people had been to Alwar, and 12 people had visited both cities. Find the number of people who had visited:

- Jaipur or Alwar;
- Alwar but not Jaipur
- only one of the two cities;
- neither city.

(b) (i) Given $g(x) = a[f(x)]^2 + bf(x) + c$, find elasticity of $g(x)$ and express it in terms of e , the elasticity of $f(x)$ w.r.t x .(ii) Given the function $f(x) = 5x^4 + 9x^3 - 11x^2 + 10$, prove that the graph of f has a slope equal to 9, somewhere between $x = -1$ and $x = 1$.(c) Find the local maximum and minimum values of the cubic function $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{15}{2}$. Find the points of inflection (if any).(d) (i) Consider the three vectors $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Do they span \mathbb{R}^3 ?

(ii) Find the equation of the plane passing through the points $a = (1, 1, -1)$,
 $b = (2, 0, 2)$ and $c = (0, -2, 1)$. Where does it cut the axes?
(3.75, 5, 5, 5)

4. (a) Let A and B be sets. Prove $A \subseteq B$ if and only if $A \cup (B/A) = B$.
(b) The population of a country grows according to the following function of time, t :

$$P(t) = \frac{a}{b + \left(\frac{a}{P(0)} - b\right)e^{-at}}$$
. Given that $P(0) = P_0$,

(i) Find $\frac{dP}{dt}$.
(ii) Find the proportional rate of growth of the population.
(iii) Show that the population has a limiting value and find this value.
(c) Find the values of x (if any) at which f is not continuous and determine whether each such discontinuity is removable.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 3}$$

(d) For the function $f(x) = \frac{5}{x^4 - 2x^2 + 3}$, find the intervals where the function is increasing/decreasing. Find the extreme points of f and classify them as local/global. Find the asymptotes of the function.
(e) Prove that $(D + ABC)^{-1} = D^{-1} - D^{-1}A(B^{-1} + CD^{-1}A)^{-1}CD^{-1}$ if $(B^{-1} + CD^{-1}A) \neq 0$ given that D and B are invertible matrices with dimensions $n \times n$ and $m \times m$ respectively. Also, A and C are matrices with dimensions $n \times m$ and $m \times n$ respectively.

(3, 3, 4, 5.75, 3)

5. (a) (i) Given $f(t + 2) = \sqrt{t^2 - 2t + 4}$, find $f(t)$.
(ii) What is the slope of the line tangent to the graph of $y = \frac{e^{-x}}{x+1}$ at $x = 1$?
(b) Find the domain of the function $f(x) = \frac{\ln x}{(\ln x - 1)}$. Show that f has an inverse function g and find the expression for g .
(c) If $x^2y - 3y^2 = 2x$, find $\frac{dy}{dx}$. Find the points at which the curve has vertical tangents.
Check if the curve also has horizontal tangents.
(d) Given $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$, for $x \in [-3, 3]$

Is the function continuous? Is it differentiable? Does the Mean Value theorem hold?
Find the absolute extreme values in the interval.

(e) The Leontief System for a two-sector economy is given as follows

$$\begin{aligned} 0.8x_1 &= b_1 \\ -0.5x_1 + 0.65x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

(i) Find a_{12} and a_{22} and interpret them.
(ii) Assuming technology does not change find the change in the output of the two sectors if final demand of sector 1, b_1 increases by a unit. What happens to the output of the two sectors if final demand of both sectors increases by a unit each?

(3, 4, 3, 4, 4.75)

6. (a) Check if the following relations represent functions.

(i) $y = x^3$
(ii) $y^2 = x^3$

(b) Find the values of m if $f(x) = \frac{(x-m+2)^2}{x^2-mx}$ intersects its horizontal asymptote on the line $x - y = 8$.
(c) Let U be a concave function and g be a non-decreasing and concave function. Let the function f be defined as $f(x) = g(U(x))$ for all x . Is it possible that f is a convex function? Under what circumstances will f be a concave function if g is a non-increasing function?
(d) Consider the function $f(x) = kx^3 - 27x + 6$ with $k > 0$. Find the local maximum and minimum values of the given function. What restriction on k will ensure that $f(x)$ has three distinct real roots?

(e) For n dimensional vectors v_1, v_2, v_3 and v_4 , prove/disprove the following:
(i) If $v_1 + v_2$ and $v_1 - v_2$ are linearly independent then v_1 and v_2 are also linearly independent.
(ii) If v_1, v_2 and v_3 are linearly dependent but v_1 and v_2 are linearly independent then v_3 is a linear combination of v_1 and v_2 .
(iii) If v_4 is a linear combination of v_1, v_2 and v_3 and v_3 is a linear combination of v_1 and v_2 , then v_1, v_2 and v_4 are linearly dependent.

(2, 4, 3, 5, 4.75)

Unique Paper Code: 12271102

Name of the Paper: Mathematical Methods for Economics I

Name of the Course: B.A. (Hons.) Economics (CBCS Core)

Semester: I

Duration: 3 Hours

Maximum Marks: 75

Instructions for the candidates:

1. Answers may be written either in English or in Hindi; but same medium should be used throughout the paper.
2. **There are six questions in all. Attempt any four.**
3. All parts of a question must be answered together.
4. All questions carry equal (18.75) marks.
5. Use of simple calculator is allowed.

विद्यार्थियों के लिए निर्देश:

1. उत्तर अंग्रेजी या हिंदी माध्यम में लिखे जा सकते हैं; लेकिन सभी उत्तर एक ही माध्यम में होने चाहिए।
2. इस प्रश्न-पत्र में कुल छह प्रश्न हैं। किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिये।
3. एक प्रश्न के सभी भागों के उत्तर एक ही साथ दें।
4. सभी प्रश्नों के अंक समान (18.75) हैं।
5. साधारण कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

Q1. (a) For the given equation

$$y = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

- Find the all-possible asymptotes
- Is it continuous everywhere? Is it differentiable everywhere?
- Find the region(s) of increase and decrease of y .
- Find the inflection point(s) if they exist. Find the intervals(s) of concavity and convexity.
- Does it have a global maximum or minimum? Why and why not?
- Find all possible local maxima and minima if they exist.

(vii) Sketch the graph. (14)

(b) Find the domain of (2)

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{x + 1}}$$

(c) Consider the following system of equations:

$$ax_1 + bx_2 = p$$

$$cx_1 + dx_2 = q$$

$$ex_1 + fx_2 = r$$

Write down the augmented matrix. If the augmented matrix is row equivalent to identity matrix, then is the system of equations consistent? Justify your answer. (2.75)

(a) निम्नलिखित समीकरण के लिए:

$$y = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

- सभी संभव अनन्तस्पर्शीयों (asymptotes) को जात कीजिए।
- क्या यह सर्वत्र सतत है? क्या यह सर्वत्र अवकलनीय है?
- y में वृद्धि और ह्रास के क्षेत्र(ओं) को जात कीजिये।
- अगर विभक्ति (inflection) बिन्दु विद्यमान हैं, तो उनको जात कीजिये। अवतलता और उत्तलता के अंतराल(ों) को जात कीजिये।
- क्या इसके कोई ग्लोबल उच्चिष्ट या निम्निष्ट हैं? यदि हैं तो, क्यों हैं और नहीं हैं, तो क्यों नहीं हैं?
- अगर स्थानीय उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट विद्यमान हैं, तो उन सभी को जात कीजिये।
- रेखा-चित्र बनाइये।

(b) निम्नलिखित का अनुक्षेत्र (डोमेन) जात कीजिए।

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{x + 1}}$$

(c) निम्नलिखित समीकरण पद्यति पर विचार कीजिये।

$$ax_1 + bx_2 = p$$

$$cx_1 + dx_2 = q$$

$$ex_1 + fx_2 = r$$

संवर्धित आव्यूह लिखें। यदि संवर्धित आव्यूह तत्समक आव्यूह के पंक्ति समकक्ष हो तो क्या समीकरणों की यह पद्यति सुसंगत है? अपने जवाब का औचित्य साबित कीजिये।

Q2. (a) A bus has a total capacity of 60 people. The relation between the numbers of people per trip (x) to the fare charged (p rupees) is given by $p = [3 - (\frac{x}{40})]^2$. Write an expression for total revenue $R(x)$ per trip received by the bus company. Find the number of people per trip that will maximize the revenue. (4)

(b) Suppose that the two functions, f and g , are differentiable on an interval $[a, b]$ and we have $f(a) = g(a)$ and $f(b) = g(b)$. Show that there is at least one point between a and b where the tangents to the graphs of f and g are parallel. (4)

(c) Show that the tangent to the curve $y = x^3$ at any point (c, c^3) meets the curve again at z point where the slope is four times the slope at (c, c^3) . (4)

(d) Determine if the following function has an inverse. (2.75)

$$f(x) = |x + 4| - |x - 4|$$

(e) For what values of p , the given system of equations below has a unique solution

$$(p + 1)x + (p + 1)y = q$$

$$4x + (p + 4)y + (p - 1)z = 1$$

$$3x + 5y + (p - 1)z = -3.$$

What conditions must q satisfy for the system to have a solution when $p = 1$

Find that solution. (4)

(a) एक बस की कुल क्षमता 60 व्यक्ति है। प्रति ट्रिप व्यक्तियों की संख्या (x) का किरण (p रुपये) के साथ संबंध $p = [3 - (\frac{x}{40})]^2$ के द्वारा दिया गया है। बस कंपनी द्वारा प्रति ट्रिप प्राप्त

कुल राजस्व $R(x)$ के लिए एक अभिव्यक्ति लिखें। प्रति ट्रिप लोगों की वह संख्या जात कीजिये जिससे अधिकतम राजस्व प्राप्त हो।

(b) मान लीजिये कि f और g , अंतराल (a, b) पर अवकलनीय हैं और $f(a) = g(a)$ तथा $f(b) = g(b)$ है। दिखाइए कि a और b के बीच कम से कम एक बिंदु है जहाँ f और g के ग्राफों की स्पर्शरेखाएं समानांतर हैं।

(c) दिखाइए कि वक्र $y = x^3$ की किसी भी बिन्दु (c, c^3) पर स्पर्शरेखा उस वक्र को उस बिन्दु z पर पुनः मिलती है जहाँ का ढाल, (c, c^3) पर ढाल का चार गुना है।

(d) यदि निम्नलिखित फलन का कोई व्यतक्रम है तो निर्धारित कीजिये:

$$f(x) = |x + 4| - |x - 4|$$

(e) p के किन मूल्यों के लिए, समीकरणों की नीचे दी गई पद्यति का एक अद्वितीय हल है:

$$(p + 1)x + (p + 1)y = q$$

$$4x + (p + 4)y + (p - 1)z = 1$$

$$3x + 5y + (p - 1)z = -3.$$

जब $p = 1$ हो तो पद्यति के हल के लिए q को किन शर्तों को पूरा करना चाहिए। वह हल जात कीजिये।

Q3. (a) A function f and its derivative take on the values shown in the table. If g is the inverse of f , find $g'(6)$

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	6	$1/3$
6	8	$3/2$

(4)

(b) For $0 < a < 1$, find the optimum value(s) of the function $f(x) = xa^x$. (4)

(c) The elasticity of a function $y = f(x)$ is given as ρ . Then find the elasticities of the total function, $xf(x)$, and the average function $\frac{f(x)}{x}$ in terms of ρ .

Also find the values of ρ for which the total function and the average function can have their respective maximums. (4)

(d) Let $L_1: 2+t, -t, 2-t$ and $L_2: -1-2s, s, 2+3s$, be two lines. Show that L_1 and L_2 do not intersect. The line L_3 passes through the point $P(1, 1, 3)$ and its direction is perpendicular to the directions of both L_1 and L_2 . Obtain parametric equations for L_3 . Find the coordinates of point Q where L_3 and L_2 intersect and verify P lies on L_1 . (3.75)

(e) If a quantity A is growing exponentially over the time, and A_1, A_2 are the values at times t_1 and t_2 respectively, then find the growth rate of the quantity in terms of A_1 and A_2 . (3)

Q3. (a) एक फलन f और इसके अवकलज के मान नीचे तालिका में दर्शाये गए हैं। यदि g , f का व्युत्क्रम हो तो $g'(6)$ ज्ञात कीजिये।

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	6	1/3
6	8	3/2

(b) $0 < a < 1$, के लिए फलन $f(x) = xa^x$ का इष्टतम मान ज्ञात कीजिये।

(c) एक फलन, $y = f(x)$, की लोच ρ से दी गयी है। ρ के पदों में कुल फलन, $xf(x)$, और औसत फलन, $\frac{f(x)}{x}$, की लोच ज्ञात कीजिये। ρ के उन मानों को भी ज्ञात कीजिये जिनके लिए कुल फलन और औसत फलन के अपने संबंधित उच्चिष्ठ हो सकते हैं।

(d) मान लीजिये कि $L_1: 2+t, -t, 2-t$ और $L_2: -1-2s, s, 2+3s$ दो रेखाएँ हैं। दिखाये कि L_1 और L_2 परस्पर काटते नहीं हैं। रेखा L_3 बिन्दु $P(1, 1, 3)$ से होकर गुजरती है और इसकी दिशा L_1 और L_2 दोनों की दिशाओं के लम्बवत है। L_3 के लिए पैरामीट्रिक समीकरण ज्ञात कीजिये। बिन्दु Q , जहाँ कि L_1 और L_2 परस्पर काटते हैं, के निर्देशांक ज्ञात कीजिये और प्रमाणित कीजिये कि P, L_1 पर है।

(e) यदि समय के साथ एक मात्रा A घातांकीयता (exponentially) से बढ़ रही हो, और A_1, A_2 क्रमशः t_1 और t_2 समय पर इसके मान हों, तो A_1 और A_2 के पदों में मात्रा की वृद्धि दर ज्ञात करें।

Q4. (a) Determine if the function $f(x) = e^{-x^2/2}$ is concave or convex in x . Find the local maxima, minima, and inflection points. Sketch the graph. Does it have a global maximum, minimum? (4.75)

(b) Given that f'' is continuous on $[a, b]$ and f has three zeros in the interval. Show that f'' has at least one zero in (a, b) . (3)

(c) Find the equation of the tangent lines to the inverse at the given point

$$f(x) = \frac{-e^{-3x}}{x^2+1} \text{ at } (-1, 0)$$

$$g(x) = 7x^3 + (\ln x)^3 \text{ at } (7, 1)$$
 (5)

(d) Let n be an odd positive integer. Determine whether there exists an $n \times n$ real matrix such that

$$A^2 + I = 0,$$

where A is an $n \times n$ matrix, I is identity matrix, and 0 is a null matrix. (3)

(e) Let A and B are $n \times n$ matrices with real entries. Given that $A + B$ is invertible, show that

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A \quad (3)$$

(a) निर्धारित कीजिये कि फलन $f(x) = e^{-x^2/2}$, x में अवतल है या उत्तल। स्थानीय अधिकतम और स्थानीय न्यूनतम और विभक्ति के बिंदु (बिन्दुओं) को ज्ञात करें। रेखा-चित्र बनाइये। क्या इसका ग्लोबल उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ है?

(b) दिया गया है कि f'' $[a, b]$ पर सतत है और f के अंतराल में तीन शून्य हैं। दिखाइये कि f'' की (a, b) में न्यूनतम एक शून्य है।

(c) दिये गए बिन्दुओं पर व्युत्क्रम से स्पर्शी रेखाओं की समीकरण ज्ञात कीजिये:

$$f(x) = \frac{-e^{-3x}}{x^2+1} \quad \text{बिन्दु } (-1, 0) \text{ पर}$$

$$g(x) = 7x^3 + (\ln x)^3 \quad \text{बिन्दु } (7, 1) \text{ पर}$$

(d) मान लीजिये कि n एक विषम धनात्मक पूर्णांक है। निर्धारित कीजिये कि क्या एक $n \times n$ वास्तविक आव्यूह विद्यमान है, ताकि:

$$A^2 + I = 0 ,$$

जहाँ A एक $n \times n$ आव्यूह, I तत्समक आव्यूह, और 0 एक शून्य (null) आव्यूह है।

(e) मान लीजिये कि A और B $n \times n$ वास्तविक प्रविष्टियों वाले आव्यूह हैं। दिया गया है कि $A + B$ प्रतीप्य (invertible) है, तो दिखाये कि

$$A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$$

Q5. (a) Let $f(x) = x^m(1 - x)^n$, where m and n are integers greater than 1. Show that $y = f(x)$ has a stationary point in the interval $0 < x < 1$. Show that this stationary point is maximum if n is even and a minimum if n is odd. (5)

(b) Suppose the population $A(t)$ of a species grows exponentially so that

$$A(t) = A(0)e^{rt},$$

Where $A(0)$ is the initial population, t is the number of years and r is a positive constant. Now answer the following questions.

(i) If the population doubles in n years, find n .

(ii) Show that the above function can be written as $A(t) = A(0)2^{\frac{t}{n}}$ (5)

(c) Let w_1 and w_2 be two vectors in R^n . Moreover, they are of unit length i.e. $\|w_1\| = \|w_2\| = 1$ and their dot product is given by $w_1 \cdot w_2 = w_1' w_2 = -1/2$, where w_1' is the transpose of w_1 . Find the length of $(w_1 - w_2)$ i.e. $\|w_1 - w_2\|$. (4.75)

(d) Let u_1 and u_2 be two $nx1$ column vectors. Prove that $tr(u_1 u_2') = u_1' u_2$ (4)

(a) मान लीजिये $f(x) = x^m(1 - x)^n$, जहाँ m और n , 1 से अधिक मान वाले पूर्णांक हैं। दिखाइये कि $y = f(x)$ का अंतराल $0 < x < 1$ में एक स्थिर बिंदु है। दिखाइए कि अगर n सम है तो यह स्थिर बिंदु उच्चिष्ट है और यदि n विषम है तो यह निम्निष्ट है।

(b) मान लीजिये कि एक प्रजाति की जनसंख्या $A(t)$ में इस प्रकार घातांकीय वृद्धि होती है, कि

$$A(t) = A(0)e^{rt}$$

जहाँ, $A(0)$ प्रारंभिक जनसंख्या है, t वर्षों की संख्या है और r एक धनात्मक स्थिरांक है। निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिये:

(i) यदि n वर्षों में जनसंख्या दोगुनी हो जाती है, तो n ज्ञात कीजिये।
(ii) दिखाइये कि उपरोक्त फलन को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है:

$$A(t) = A(0)2^{\frac{t}{n}}$$

(c) मान लीजिये कि w_1 and w_2 R^n में दो वेक्टर हैं। इसके अलावा वे इकाई लंबाई के हैं अर्थात $\|w_1\| = \|w_2\| = 1$ और उनकी डॉट गुना $w_1 \cdot w_2 = w_1' w_2 = -1/2$ के द्वारा दी गयी है। जहाँ w_1' , w_1 का पक्षान्तर है। $(w_1 - w_2)$ अर्थात $\|w_1 - w_2\|$ की लंबाई ज्ञात कीजिये।

(d) मान लीजिये कि u_1 and u_2 दो $nx1$ स्तम्भ वेक्टर हैं। सिद्ध कीजिये कि

$$tr(u_1 u_2') = u_1' u_2$$

Q6. (a) An epidemic spread through a community in such a way that t weeks after its outbreak, the number of residents who have been infected is given by the function

$$f(t) = \frac{9000}{1+999e^{-t}},$$

where 9000 is the total number of susceptible residents. Show that the epidemic is spreading most rapidly when half the susceptible residents have been infected. What happens over time? Sketch the graph. (4)

(b) Let u, v, w be three vectors in R^n . Suppose that vectors u, v are orthogonal and the norm of v is 4 and $v'w = 7$. Find the value of the real number x in $u = v + xw$. (4)

(c) Let A be an $n \times n$ nonsingular matrix of linear transformation. Let v_1 and v_2 be linearly independent vectors in R^n . Prove that the vectors Av_1 and Av_2 are linearly independent. (4)

(d) Show that $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$ for $x > 0$ (2.75)

(e) Test the convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{n\sqrt{n+3}} \right) \quad (4)\backslash$$

(a) एक महामारी सामुदायिक स्तर पर इस प्रकार फैलती है कि इसके शुरू होने के t हफ्तों बाद संक्रमित निवासियों की संख्या को अग्रलिखित फलन के द्वारा दिया जाता है:

$$f(t) = \frac{9000}{1+999e^{-t}},$$

जहाँ अतिसंवेदनशील निवासियों की कुल संख्या 9000 है। दिखाइये कि महामारी उस समय सर्वाधिक तीव्रता से फैलती है जब आधे अतिसंवेदनशील निवासी संक्रमित हो जाते हैं। समय बीतने के साथ क्या घटित होता है? रेखा-चित्र बनाइये।

(b) मान लीजिये कि $u, v, w \in R^n$ में तीन वेक्टर हैं। मान लीजिये कि u, v वेक्टर आयतीय हैं और v का नोर्म 4 है और $v'w = 7$ । वास्तविक संख्या x का मान $u = v + xw$ में ज्ञात कीजिए।

(c) मान लीजिये कि A एक $n \times n$ वाला रैखिक परिवर्तन का व्युत्क्रमणीय (non-singular) आव्यूह है। मान लीजिये कि v_1 और $v_2 \in R^n$ में रैखिक रूप से स्वतंत्र वेक्टर हैं। सिद्ध कीजिये कि वेक्टर Av_1 और Av_2 रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं।

(d) दिखाइये कि, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$ for $x > 0$

(e) निम्नलिखित श्रृंखला के अभिसरण की जांच कीजिये।

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{n\sqrt{n+3}} \right)$$